□ LOGIQUE & CALCUL

Mille collections de nombres

Les amoureux des nombres tentent de repérer les plus intéressants et les réunissent en collections. Ils doivent faire face à l'infini et y mettre de l'ordre.

Jean-Paul DELAHAYE

Dans tout foyer, il y a au moins un dictionnaire, souvent plusieurs, et parfois aussi une encyclopédie. Il s'agit bien sûr de dictionnaires ou d'encyclopédies de mots. Pourtant, il existe aussi des dictionnaires de nombres qui, même s'ils intéressent moins de lecteurs, sont aussi d'inépuisables mines d'informations et posent une multitude de questions mathématiques, logiques et divertissantes.

Un Larousse des nombres ?

Le premier obstacle avec les nombres est que contrairement aux mots, il y en a une infinité. Un choix s'impose !

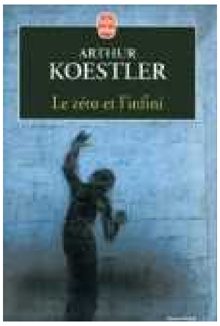
Certains livres pour jeunes enfants sont composés d'une page par nombre de 1 à 10, ou de 1 à 20. Le problème du choix pour eux est donc résolu en prenant tous les entiers d'un intervalle donné commençant à 1. Il s'agit en général de livres illustrés où sur la page du « 1 » un objet est représenté une fois, sur la page du « 2 » un autre objet est représenté deux fois, etc. Ces dictionnaires ont pour seule ambition d'apprendre aux enfants à énumérer, lire et écrire les nombres. On pourrait aussi constituer un livre où chaque page serait une couverture d'un livre dont le titre comporte un nombre entier (*voir le début de la liste en bas de page*).

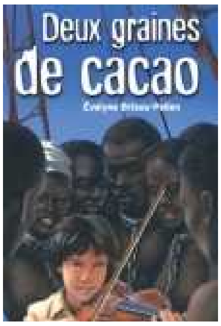
Ces livres ne posent guère de problèmes d'ordonnancement, contrairement aux dictionnaires de nombres pour adultes.

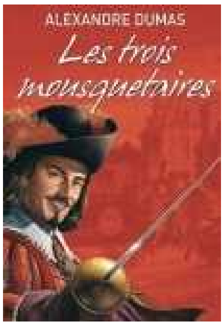
En France, le plus connu de ces dictionnaires est celui de François Le Lionnais, paru en 1983 aux éditions *Hermann,* et dont le titre est *Les nombres remarquables*. L'auteur explique comment, au cours des années, il créa l'ébauche de la collection qui allait le conduire à publier cet ouvrage singulier plusieurs fois réédité. Le livre présente 446 nombres méritant une attention particulière. « Je commençais à inscrire sur un carnet tous les nombres que je rencontrais et qui me semblaient dignes d'intérêt. Cette liste s'enrichit et s'affina après l'université. Elle contint bientôt plus d'une centaine d'éléments. Avant la Seconde Guerre mondiale, ma collection avait pris la forme d'un fichier où pour certains nombres, la même fiche présentait plusieurs propriétés différentes. »

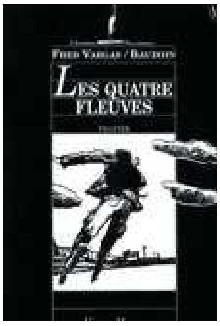
Le critère utilisé par Le Lionnais pour retenir un nombre était l'intérêt que lui-même y trouvait parce qu'il se présentait dans un énoncé mathématique dont il avait connaissance ou qui lui avait été signalé. Le nombre 144 par exemple appartient à sa liste, car c'est le seul supérieur à 1 qui soit un nombre de Fibonacci (la suite 0, 1, 1, 2, 3... où chaque élément est la somme des deux précédents). La présence du nombre 1 500 est justifiée parce qu'il est le nombre de segments de droite déterminés par l'intersection des plans associés aux faces d'un icosaèdre régulier. L'entier 12 758 a une place dans la sélection de Le Lionnais parce que c'est le plus grand entier qui ne peut pas être écrit comme somme de cubes distincts. Notons que les nombres qui ne s'écrivent pas comme sommes de cubes distincts sont en tout exactement 2 788... qui, étrangement, n'est pas un nombre retenu par Le Lionnais !

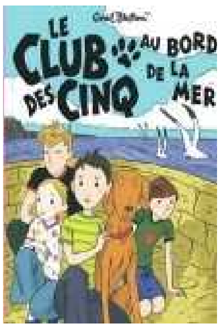
Alors que l'ordre alphabétique s'impose pour un dictionnaire, pour une collection de











nombres, la question est moins évidente. Le problème des nombres négatifs ou des nombres complexes – qu'il est impossible d'ordonner totalement, du moins en respectant la structure algébrique de corps – rend délicat le choix d'une méthode de présentation.

Le Lionnais a résolu la difficulté en ne retenant que les nombres positifs réels et en énumérant par ordre croissant ceux qu'il avait choisis. Un petit complément de trois pages vient s'ajouter à la liste principale et propose quelques nombres complexes, quelques nombres infinis et transfinis.

Un autre complément d'une page recense trois nombres qualifiés de « finis non déterminés ». Chacun d'eux mérite un commentaire, car le temps passé depuis la parution du dictionnaire a bouleversé les prétendues indéterminations.

Chaitin, Mills et 7 dans π

Le premier est le nombre de Chaitin aujourd'hui nommé nombre oméga et noté Ω. Même s'il n'est pas totalement calculable – un système formel ne peut en connaître qu'un nombre fini de chiffres – c'est un nombre parfaitement déterminé (contrairement à ce que semble penser Le Lionnais) et il est même partiellement calculable. Nous l'avons déjà évoqué dans la rubrique de janvier 2009, et rappelons qu'en 2002 Christian Calude, Michael Dinneen et Chi-Kou Shu ont déterminé les premiers chiffres binaires du nombre oméga : 0000001000000100000110001000011010001111110010111011101000000100.

Le deuxième nombre « fini non déterminé » de Le Lionnais est le nombre de Mills. En 1947, W. H. Mills démontra qu'il existait au moins un nombre réel A tel que : $[A^{3^n}]$ est toujours un nombre premier. La notation $[x]$ désigne la partie entière de x, exemple : $[3{,}14159] = 3$.

Dans son article de 1947, Mills prouvait que A existait sans en donner aucun chiffre. On démontra ensuite qu'il y avait une infinité (non dénombrable) de tels nombres A et que l'un d'eux était plus petit que tous les autres. C'est lui que l'on nomme constante de Mills, dont le calcul est particulièrement délicat ; les seules méthodes connues pour l'approcher ne sont valides que si on considère vraie l'hypothèse de Riemann, un des plus difficiles problèmes irrésolus des mathématiques (voir *Pour la Science*, mars 2009). On ne peut donc pas dire que Le Lionnais avait tort de classer le nombre de Mills dans la catégorie des nombres finis non déterminés, quoique sous l'hypothèse de Riemann un calcul mené par Chris Caldwell et Yuangyou Cheng en 2005 en donne 6850 chiffres décimaux dont voici le début : 1,30637788386308069046861449260260571291678458515671364436805375996643405376682659882150140370119739570729... Les nombres premiers qu'on obtient avec la formule de Mills indiquée précédemment sont : 2, 11, 1361, 2521008887,160222362 04009818131831320183,4113101149215104800030529537915953170486139623539759933135949994882770404074832568499. Le suivant n'est pas encore connu.

Le troisième nombre « fini indéterminé » de Le Lionnais est noté N_{int}. Il est défini à partir des décimales du nombre π, lui-même présent bien sûr parmi les 446 élus de son dictionnaire. Là encore, les progrès mathématiques ont changé le statut de ce nombre remarquable qui, comme on va le voir, ne l'est plus aujourd'hui. Par définition : $N_{int} = (-1)^k$, où k est le chiffre qui suit la première occurrence de sept fois le chiffre « 7 » dans le développement décimal de = 3,1415926...

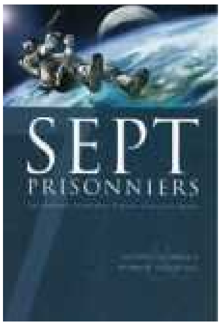
Ce nombre a parfois été utilisé par les mathématiciens de l'école intuitionniste (d'où la notation N_{int}) pour illustrer qu'une vérité mathématique pourrait ne pas être fixée et que dans certains cas, il ne serait donc pas vrai que « A ou non A ». Le nombre N_{int} est positif si k est pair (0, 2, 4, 6, 8) et négatif si k est impair (1, 3, 5, 7, 9) ; or d'après ce que soutenaient les intuitionnistes, tant qu'on ne sait pas déterminer k, le nombre N_{int} n'est ni positif ni négatif. Le Lionnais précise : « On ne sait d'ailleurs même pas si ce nombre existe. »

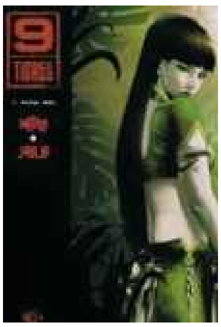
Le Lionnais serait sans doute heureux d'apprendre qu'aujourd'hui on sait que N_{int} existe. La suite 7777777 apparaît en position 3346228 dans les décimales de π et est suivie d'un 3, donc $N_{int} = -1$. C'est un entier négatif... et il n'est remarquable que parce que c'est le plus grand ! Les chiffres qui entourent la première occurrence de 7777777 dans π sont : ...36838278458526587777777363142255989377 3..., ce que vous vérifiez sur le site :

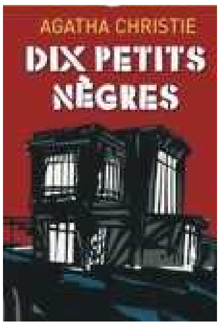
http://www.angio.net/ pi/bigpi.cgi.

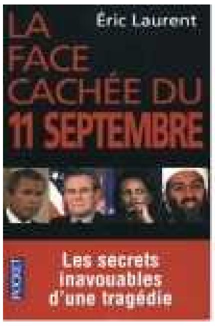
À vrai dire, une mise à jour du dictionnaire de Le Lionnais ne serait pas difficile. En effet, si, au lieu de définir N_{int} en considérant la présence de sept « 7 » consécutifs, on le définissait de la même manière avec la présence de cent « 7 » consécutifs dans les décimales de π, alors on retomberait sur un exemple – valable pour de nombreuses années – de nombre fini non déterminé.

Il existe bien d'autres dictionnaires de nombres *(voir la bibliographie)*. Certains ne se limitent pas aux propriétés mathématiques des nombres et, par exemple, recensent les usages faits des nombres dans les expressions du langage courant, les proverbes, les









Josh Sommers

1. Dictionnaire impossible ?

Le plus petit entier positif d'un dictionnaire de nombres remarquables qui n'est pas dans le dictionnaire – et il y a nécessairement un tel plus petit entier – est de ce fait un nombre remarquable. Un dictionnaire de nombres remarquables est donc impossible ! Ce paradoxe de l'autoréférence est facile à contourner. Par exemple, en interdisant dans la définition d'un nombre du dictionnaire de mentionner le dictionnaire lui-même.

Il est amusant d'examiner les plus petits entiers absents des dictionnaires classiques de nombres et de trouver (grâce aux autres dictionnaires !) des propriétés qui leur auraient valu d'être cités.

Dans le dictionnaire de Le Lionnais, le premier entier absent est 49 qui est pourtant remarquable puisque la somme des chiffres du carré de 49 (égal à 2401) est la racine carrée de 49.

Dans le dictionnaire de Wells, le premier entier absent est 43 qui pourtant est tout à fait extraordinaire puisque c'est le plus petit entier qu'on peut écrire comme la somme de deux, trois, quatre ou cinq nombres premiers différents : $43 = 41 + 2$; $43 = 11 + 13 + 19$; $43 = 2 + 11 + 13 + 17$; $43 = 3 + 5 + 7 + 11 + 17$.

Dans le dictionnaire de De Konninck, le premier entier absent est 95 qui est pourtant le nombre de nombres premiers inférieurs à 500 et un nombre présent dans le triangle de Pascal. C'est aussi le plus petit nombre dont la décomposition en facteurs premiers utilise tous les chiffres de son écriture, plus au moins un autre : $95 = 5 \times 19$.

Dans la version anglaise de *Wikipédia* du 14 février 2009, le premier nombre non mentionné (dans les pages dédiées aux nombres entiers) est 1004 alors que 1004 est la position de la première apparition de la séquence 1234 dans les décimales du nombre *e* (information trouvée grâce à l'encyclopédie de N. Sloane).

Le premier entier à ne pas apparaître dans l'encyclopédie de N. Sloane (en février 2009) est 11630 qui est pourtant le numéro de la norme ISO pour les appareils de levage à charge suspendue (ce n'est pas mathématique, mais mon moteur de recherche n'a rien proposé de mieux !).

titres de romans ou de films, et dans la culture populaire (c'est le cas du *Dictionnaire des chiffres en toutes lettres* de Pierre Réseau).

Nous nous limiterons aux dictionnaires de nombres portant sur les propriétés mathématiques des nombres. Certains sont spécialisés dans les nombres entiers (c'est le cas de celui de Jean-Marie De Konninck, paru en 2008), d'autres donnent une place prépondérante aux nombres réels (c'est le cas du magnifique ouvrage de Steven Finch, *Mathematical Constants*, paru en 2003 et qui donne des détails sur un choix restreint de 136 nombres). D'autres, suivant en cela Le Lionnais, acceptent plusieurs catégories de nombres. Le plus connu est sans doute le livre de David Wells paru en anglais en 1987 et traduit en français en 1995.

À ces dictionnaires, il faudrait bien sûr ajouter tous les formulaires et toutes les tables numériques (mathématiques ou physiques) et même les annuaires statistiques et autres *Quid* (édité annuellement entre 1963 et 2007 et qu'Internet a condamné).

Un nombre rarement oublié (présent par exemple dans la sélection de Le Lionnais, de De Konninck et de Wells) est le nombre 1729 qui doit sa gloire à une anecdote racontée par Godfrey Hardy au sujet du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan : « Je me souviens avoir été le voir quand il était malade à Putney. J'avais pris un taxi dont j'avais noté le numéro, 1729. Je l'indiquais à Ramanujan en lui disant que ce nombre me semblait particulièrement sans intérêt et que j'espérais que ce n'était pas un mauvais présage. Non, me répondit-il, c'est un nombre très intéressant, c'est le plus petit nombre qui est la somme de deux cubes de deux façons différentes. »

Quitte à nuire un peu à la légende qui veut que Ramanujan ait calculé instantanément de tête l'étonnante propriété de 1729, De Konninck dans son dictionnaire indique que la remarque concernant 1729 avait déjà été formulée dès 1657 par Bernard Frénicle de Bessy, et qu'il est possible que Ramanujan n'ait fait que se souvenir d'une lecture.

Le plus ou le moins remarquable ?

L'intérêt porté à 1729 a conduit à en identifier bien d'autres propriétés intéressantes dont voici trois exemples :

– 1729 est le troisième nombre de Carmichaël (les deux premiers sont 561 et 1105). Un nombre de Carmichaël est un nombre composé p qui se comporte comme un nombre premier vis-à-vis du test de Fermat (il vérifie que $a^p - a$ est multiple de p pour tout nombre a sans facteur commun avec p). Ces nombres jouent un rôle important en arithmétique et l'on sait depuis 1994 qu'il en existe une infinité.

– 1729 est la position du début de l'emplacement dans les décimales de *e* de la séquence 0719425863 qui est la première occurrence d'une séquence de longueur 10 contenant chaque chiffre une et une seule fois.

– 1729 est l'un des quatre nombres (les autres sont 81, 1458 et 1) dont la somme des chiffres multipliée par le nombre inversé redonne le nombre de départ : $1 + 7 + 2 + 9 = 19$, $19 \times 91 = 1729$.

Toujours est-il qu'en souvenir de ce taxi, le nombre 1729 est nommé nombre de Hardy-Ramanujan et que tous les nombres qui peuvent s'exprimer de plusieurs façons comme somme de cubes sont nommés les nombres *Taxicabs* (voir l'article de Christian Boyer, Dossier *Jeux math'* de *Pour la Science*, avril 2008).

Dans un dictionnaire de nombres entiers remarquables, un paradoxe semble nous guetter et rendre incohérent le dictionnaire de nombres « remarquables » ou « curieux », ou « intéressants ». En effet, le plus petit entier qui n'est pas présent dans le dictionnaire est remarquable du fait que son absence soit la première, donc il faut l'ajouter au dictionnaire. Mais si on l'ajoute, alors il cesse d'être le premier absent du dictionnaire et n'a donc plus aucune raison d'y être (d'ailleurs un autre nombre est devenu le plus petit absent). Serait-il impossible de s'en sortir *(voir la figure 1)* ?

Internet change la donne

Aujourd'hui, cependant, l'ère des dictionnaires imprimés de nombres est sur le point d'être révolue à cause d'Internet qui permet de gérer des listes incomparablement plus longues et riches de nombres ayant des propriétés particulières.

L'encyclopédie *Wikipédia* contient un dictionnaire de nombres entiers très conséquent. Vous vous intéressez par exemple à 181 ? Alors allez sur la page : http://en.wikipedia.org/wiki/181_(number).

Celle-ci vous apprendra que 181 est un nombre premier palindrome (en le lisant de droite à gauche, on obtient encore 181) ; que 181 est jumeau du nombre premier 179 ; que 181 écrit en base 3 est encore palindrome ; que 181 est la somme de cinq nombres premiers consécutifs 29, 31, 37, 41, 43. À côté d'autres propriétés numériques, vous découvrirez aussi que 181 était le numéro du dossard de Lance Amstrong en 1999 quand il gagna son premier tour de France.

Si vous vous intéressez aux nombres réels, en plus de *Wikipédia* qui traite, bien évidemment, de π, i, e, $\sqrt{2}$ (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_réel), il sera utile d'essayer l'« Inverseur de Simon Plouffe » à l'adresse : http://pi.lacim.uqam.ca/eng/. Ce programme est construit sur une base de données de plus de 200 millions de constantes mathématiques collectées et calculées par S. Plouffe depuis mars 1986. Si vous rencontrez le nombre 8,53973422, par exemple dans un problème de physique, l'inverseur vous indiquera qu'il s'agit du nombre $\pi \times e$. Si cette valeur ne vous semble pas convenir, l'inverseur vous en propose d'autres, voisines.

Cependant pour un amateur de nombres remarquables, l'outil Internet le plus fascinant est l'encyclopédie en ligne de Neil Sloane : http://www.research.att.com/~njas/sequences/.

Elle se présente comme une encyclopédie de suites de nombres entiers et non pas comme une encyclopédie de nombres. Cependant, la façon dont elle est conçue en fait aussi un dictionnaire de nombres permettant de rechercher quelles sont les propriétés particulières d'un entier donné et, comme nous allons le voir, d'étudier très finement le problème des nombres remarquables.

L'usage le plus courant de l'encyclopédie de N. Sloane consiste à rechercher quelle pourrait bien être la logique de suites d'entiers, par exemple : 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20,... En interrogeant la page Internet, vous obtenez instantanément qu'il s'agit de la suite des nombres premiers augmentés de 1 : 2+1, 3+1, 5+1, 7+1, 11+1, 13+1, 17+1, 19+1, ...

Plus intéressant peut-être, le programme permet d'interroger la base sur un nombre isolé. Reprenons le nombre de Hardy-Ramanujan 1729. Le programme indique qu'il connaît plus de 350 suites auxquelles appartient 1729. Chacune indique une propriété de 1729 que vous pouvez examiner. Celles-ci sont classées par ordre d'importance, notion fondée sur les citations des séquences dans

2. Des variations de richesses non expliquées !

L'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane est une collection de suites de nombres entiers qu'il accumule depuis plus de 20 ans. Cette collection s'agrandit mois après mois avec l'aide de nombreux mathématiciens et amateurs qui proposent de nouvelles suites. Pour chaque suite de l'encyclopédie, quelques dizaines de termes sont stockés ainsi que des informations de nature mathématique (définitions, théorèmes, suites voisines) ou bibliographiques.

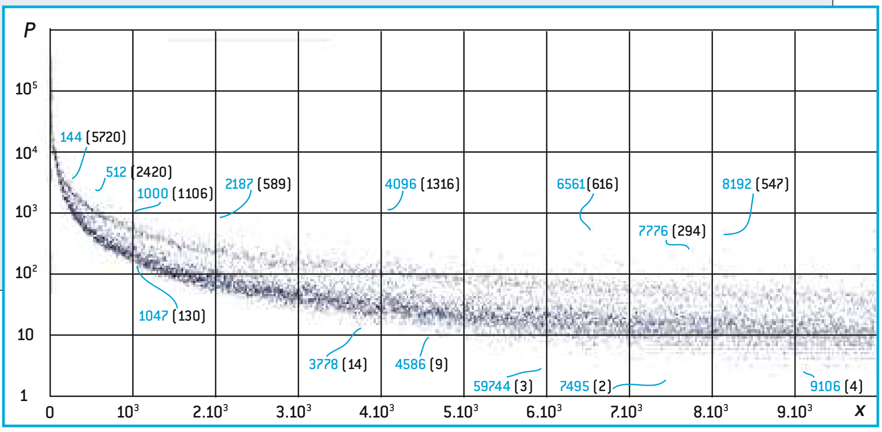
Philippe Guglielmetti a utilisé le fichier contenant toutes les suites de l'encyclopédie et a calculé pour chaque entier n (jusqu'à 10 000), le nombre P d'occurrences de n dans la base. Appartenir à une suite, c'est posséder la propriété qui définit la suite. Le nombre P calculé par Ph. Guglielmetti mesure donc la richesse en propriétés du nombre n.

Voici les premières valeurs des couples (n, P) : (2, 308154) ; (3, 221140) ; (4, 159911) ; (5, 153870) ; (6, 138364) ; (7, 122762) ; (8,116657) ; (9, 102899) ; (10, 52834).

Le nuage composé de tous les points de coordonnées (n, P) est très régulier et a une caractéristique inattendue et inexpliquée : il est divisé en deux parties séparées par une zone claire, comme si les nombres se classaient en deux catégories : ceux qui ont beaucoup de propriétés et ceux qui en ont relativement peu. Comment sont constituées plus précisément ces deux populations n'est pas bien compris aujourd'hui.

Les lecteurs qui souhaitent disposer de la feuille Excel réalisée par Ph. Guglielmetti et contenant le calcul de la suite P, le dessin associé et quelques autres données, la trouveront à l'adresse : http://www.box.net/shared/3yefxar19b. On remarque aussi que certains nombres isolés sont nettement au-dessus du nuage et ont plus de propriétés que tous ceux du même ordre de grandeur. Voici le début de la liste de ces nombres ayant une quantité anormalement grande de propriétés : 120, 256, 512, 720, 729, 840, 1000, 1024, 1260, 1296, 1440, 1536, 1597, 1680, 1728, 1764, 1800, 1920, 2016, 2048.

On y reconnaît bien les puissances de 2 (256, 512, 1024, 2048), mais là encore, pas de caractérisation bien claire de ces nombres supérieurement intéressants.



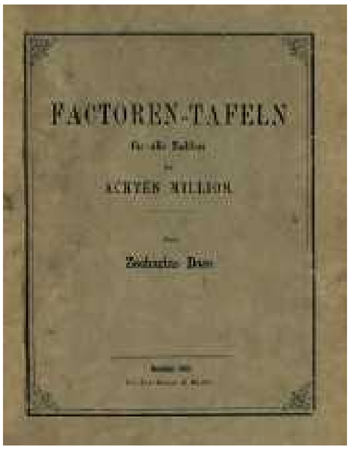
3. Les tables numériques

Parmi les dictionnaires de nombres, les tables de nombres premiers et de décompositions en facteurs premiers ont exercé une fascination particulière sur les mathématiciens et les amateurs. Ces tables comme les tables de logarithmes furent soigneusement élaborées et imprimées en milliers d'exemplaires jusqu'au milieu du XX^e siècle *(voir l'illustration à droite)*. Le calculateur prodige Zacharias Dase (1824-1861) a passé une partie de sa vie à mener des calculs pour compléter les tables de nombres premiers et de décompositions en facteurs premiers et a ainsi traité l'intervalle des entiers entre 7 000 000 et 10 000 000.

Ce type de tables est aujourd'hui inutile, car les puissances de calcul dont nous disposons sont trop grandes en regard des capacités de mémorisation que la technique met à notre disposition, ce qui n'était pas vrai avant la mise au point des ordinateurs. Le calcul systématique de tous les nombres premiers, un par un, a cependant été mené en février 2009 par Silva et Herzog jusqu'à $1{,}332 \times 10^{18}$ (voir http://www.trnicely.net/gaps/gaplist.html), dans le but d'étudier les écarts entre nombres premiers.

Une fois exploités, les nombres premiers calculés sont effacés, car leur stockage demanderait trop d'espace mémoire. Pour stocker tous les entiers premiers jusqu'à 10^{18} en utilisant un moyen de compression permettant de représenter l'état « premier ou non » de 30 nombres consécutifs par un octet de mémoire (on connaît un tel moyen), il faut 3.10^{16} octets, soit 30 000 disques durs d'un téraoctet. À raison de 200 euros par disque dur, cela ferait 6 000 000 d'euros : personne ne s'est lancé dans cet investissement et, nous l'avons dit, opérer un tel stockage ne serait guère utile, puisqu'il serait plus long d'aller lire l'information sur les disques que d'utiliser un des algorithmes rapides testant la primalité. Voir par exemple http://primes.utm.edu/links/list_of_primes/ et http://www.ieeta.pt/~tos/gaps.html.

Le plus grand nombre premier connu aujourd'hui est $2^{37156667} - 1$. Découvert en septembre 2008, il possède environ 11 millions de chiffres. Des tables de nombres premiers sont sur Internet, http://primes.utm.edu/lists/small/millions/ et http://primes.utm.edu/index.html.



les commentaires mathématiques et les références croisées que contient l'encyclopédie. Apparaît en premier la propriété que 1729 est le troisième nombre de Carmichaël. La propriété qui avait retenu l'attention de Ramanujan est bien sûr mentionnée. En parcourant les listes de nombres contenant 1729, vous découvrirez toutes sortes de choses – uniquement de nature mathématique – que même *Wikipédia* ne donne pas.

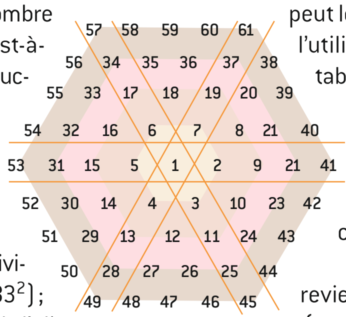
– 1729 est le treizième nombre de la forme $n^3 + 1$;

– 1729 est le quatrième nombre « factoriel sextuple » c'est-à-dire un produit de termes successifs de la forme $6n + 1$: $1729 = 1 \times 7 \times 13 \times 19$;

– 1729 est le neuvième nombre de la forme $n^3 + (n+1)^3$;

– 1729 est la somme des diviseurs d'un carré parfait (33^2) ;

– 1729 est le 24^e nombre de l'alignement oblique passant par 1, quand on dispose les entiers en spirale sur un pavage hexagonal *(voir image ci-contre)*



– 1729 est un nombre dont la somme des chiffres est, en même temps, le plus grand facteur premier (car $1 + 7 + 2 + 9 = 19$ et $1729 = 7 \times 13 \times 19$) ;

– 1729 est 1/6 de l'aire d'un triangle primitif de Pythagore (triangle rectangle à côtés entiers et premiers entre eux) ;

– 1729 est le produit d'un nombre premier, 19, par son nombre inversé, 91 ;

– 1729 est le nombre de façons d'écrire 33 comme somme de six entiers ;

– 1729 est le 15^e terme de la suite définie par la récurrence : $a_1=1$ $a_2=2$ $a_3=3$ et $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$ si $n > 3$. Etc.

Cependant, le plus grand intérêt de l'encyclopédie numérique de N. Sloane est qu'elle est disponible sous la forme d'un fichier facilement exploitable. On peut le télécharger librement et l'utiliser – par exemple avec un tableur – pour mesurer l'intérêt de chaque nombre particulier en mesurant le nombre de fois qu'il apparaît dans l'encyclopédie.

L'idée de cette utilisation revient à Philippe Guglielmetti (connu aussi sous le nom de Docteur Goulu) qui s'est posé la question : quels sont les nombres qui n'apparaissent pas dans l'encyclopédie de N. Sloane ? Ph. Guglielmetti dénomme ces nombres acratopèges : http://drgoulu.com/2008/08/24/nombres-acratopeges/. L'adjectif acratopège a été utilisé à propos des eaux de table qui n'ont pas de propriétés particulières. L'eau d'Évian par exemple est qualifiée d'acratopège (voir http://www.cavesa.ch/definition/acratopege, 126.html).

Lors d'un premier calcul mené en août 2008, le plus petit nombre acratopège trouvé fut 8795, suivi dans l'ordre par 9935, 11147, 11446, 11612, 11630... Cependant, en reprenant les calculs en février 2009, l'encyclopédie ayant été complétée de quelques centaines de suites nouvelles, le premier nombre acratopège était devenu 11630, suivi de 12067, 12407, 12887, 13258, ...

Bonnes fréquences

L'instabilité dans le temps de la notion de nombre acratopège est un peu ennuyeuse, mais elle suggère une autre idée. Considérons le nombre P de propriétés d'un entier en le mesurant par le nombre de fois qu'il est présent dans l'encyclopédie de N. Sloane. La valeur P mesure l'intérêt de n. La suite P, comme la notion de nombre acratopège, est instable dans le temps, mais elle varie lentement et certaines notions qu'on peut tirer des valeurs de P sont même très stables.

Les valeurs de P sont dessinées sur la figure 2. On obtient un nuage à l'allure assez élégante dans cette représentation en échelle logarithmique. La valeur de $P(1729)$ est 380, ce qui est assez élevé pour un nombre de cet ordre de grandeur. Pour son prédécesseur, on a cependant $P(1728) = 622$, ce qui est encore mieux ; 1728 aurait donc été plus facile pour Ramanujan. À l'inverse, $P(1730) = 106$ et donc 1730 aurait constitué une épreuve plus difficile que 1729. Ramanujan aurait cependant pu découvrir que 1730 était le septième nombre qui est somme de trois cubes de deux façons différentes, ou le troisième nombre qui est la somme de carrés consécutifs de plus d'une façon. L'intuition de Hardy que 1729 est assez banal – c'est-à-dire a peu de propriétés remarquables – n'est donc pas vraiment validée par N. Sloane.

Profondément intéressants ?

La suite $P(n)$ est globalement décroissante, cependant certains nombres n contredisent cette règle et possèdent plus de propriétés que leur prédécesseur : $P(n) > P(n-1)$.

Nous nommerons *intéressants* de tels nombres. Le premier nombre intéressant selon cette définition est 15, car $P(15) = 34183$ et $P(14) = 32487$. Viennent ensuite 16, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 47, 48, 52, 53, etc.

Il semble y avoir trop de nombres intéressants, aussi considérons qu'un nombre est *très intéressant* si son nombre de propriétés est au moins le double du nombre de propriétés du prédécesseur : $P(n) > 2P(n-1)$.

Le premier nombre très intéressant est 120, suivi de 210, 227, 239, 256, 263, 269, 288, 293, 307, 311, 317, 336, etc.

On peut aussi évaluer le nombre moyen de propriétés des voisins de n (par exemple $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2$) et rechercher les nombres qui possèdent un nombre de propriétés supérieur au double de ce nombre moyen. Nous les nommerons nombres *profondément intéressants*. On trouve dans l'ordre 256, 353, 367, 373, 389, 397, 409, 457, 487, 491, 512, 541, 547, etc.

Une multitude de questions se posent à la vue des valeurs de P ou en examinant les listes des nombres intéressants, très intéressants et profondément intéressants, listes qui ne peuvent varier que très peu maintenant, car l'encyclopédie après plus de 20 ans d'existence est bien stabilisée.

Dans quelle mesure les résultats dépendent-ils des choix méthodologiques ou personnels de N. Sloane ? C'est lui qui accepte ou refuse les nouvelles suites proposées par les internautes, l'encyclopédie reflète donc en partie ses propres centres d'intérêts mathématiques ; il a aussi choisi certains principes généraux qu'on pourrait juger arbitraires concernant par exemple le nombre de termes stockés pour chaque suite, la taille des plus grands nombres acceptés, etc.

Bien qu'incontestablement dépendante de certaines décisions particulières de ceux qui participent à l'élaboration de cette base de suites, la base n'est pas totalement arbitraire. Les contributeurs sont très nombreux, et chacun essaie sincèrement de ne faire apparaître dans la base que des suites ayant un certain d'intérêt. On peut donc défendre l'idée que la base représente une vue objective du monde numérique, vue indépendante de chaque personne qui y contribue et reflet d'une réalité mathématique immuable même si elle est difficile à définir précisément. Il n'est pas absurde même de soutenir qu'une encyclopédie martienne, s'il existait des Martiens et s'ils élaboraient une encyclopédie de ce type, serait semblable pour l'essentiel à celle de N. Sloane et ferait apparaître les mêmes nombres intéressants.

Une preuve indirecte de cette indépendance globale de l'encyclopédie, résultant du travail cumulé d'une communauté désintéressée de mathématiciens, est la forme générale du nuage de points déterminé par $P(n)$ qui est étonnamment régulier, ainsi que le serait un nuage provenant d'une expérience de physique.

Comme on le voit sur la figure 2, Ph. Guglielmetti a remarqué que ce nuage présente une caractéristique inattendue : il est divisé en deux parties séparées par une zone claire, comme si les nombres se classaient naturellement en deux catégories : les plus intéressants, au-dessus de la zone claire, et les moins intéressants en dessous. Cette partition est mystérieuse. On en recherche une explication que peut-être un lecteur de *Pour la Science* pourra nous aider à formuler.

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✔ BIBLIOGRAPHIE

Peter Bentley, **The Book of Numbers**, Firefly Books, 2008.

Andrew Hodges, **One to Nine : The Inner Life of Numbers**, W.W. Norton & Co., 2008.

Jean-Marie de Konninck, **Ces nombres qui nous fascinent**, Ellipses, 2008.

Jean-Claude Bologne, **Une de perdue, dix de retrouvées**, Larousse, 1994, 2004.

Steven Finch, **Mathematical Constants**, Cambridge University Press, 2003.

David Wells, **Le dictionnaire Penguin des nombres curieux**, Eyrolles, 1995.

Pierre Rézeau, **Petit dictionnaire des chiffres en toutes lettres**, Seuil, 1993.

Joe Roberts, **Lure of the Integers**, *The Mathematical Association of America*, 1992.

François Le Lionnais, **Les nombres remarquables**, Hermann, 1983.

Neil Sloane et Simon Plouffe, **The Encyclopedia of Integer Sequences**, Academic Press. Disponible sur Internet dans une version en évolution continue. http://www.research.att.com/~njas/sequences/